文章编号: 0438-0479(2003) 01-0005-04

“小集合”上的 Lipschitz 函数的可微性

滕岩梅, 程立新
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 设 f 为定义在可分 Banach 空间的非空闭凸集 C 的非支撑点集 $N(C)$ 上的局部 Lipschitz 函数. 本文证明了对任何 $u\in N(C)$, 均存在闭凸集 $D\subset C$, 使得 f 在 D 上的限制函数 f_D 的每个 Gateaux 可微点均是 f 相对于 D 的 Fréchet 可微点, 因而 f_D 相对于 D 的 Fréchet 可微点集是 D 的一个稠密的 G_δ- 子集; 同时指出了 ∂f_D 在点 $x\in N(D)$ 处单值且范- 范上半连续不是 f_D 在点 x 处相对于 D Fréchet 可微的必要条件, 这是 Rainwater 文章中的一个错误.

关键词: 凸集; 非支撑点; Gateaux(Fréchet) 微分; Lipschitz 函数; Banach 空间
中图分类号: O 172 文献标识码: A

设 C 为 Banach 空间 E 中的非空闭凸子集. 点 $x\in C$ 称为 C 的一个支撑点, 如果存在非零的线性泛函 $x^*\in E^*$ 使得 $\langle x^*, x\rangle = \sup_{y\in C}\langle x^*, y\rangle$. 我们把 C 的非支撑点全体记为 $N(C)$. Bishop-Phelps 定理[1] 告诉我们, C 的支撑点全体在 C 的边界上稠密; 另一方面, Phelps[2] 和 Rainwater[3] 又告诉我们, 若 $N(C)\neq\varnothing$, 则 $N(C)$ 为 C 的一个稠密的 G_δ- 子集. 显然, 当 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$ 时, $N(C)=\mathrm{int}C$. 当 $\mathrm{int}C=\varnothing$ 时, 仍有可能 $N(C)=\varnothing$. 例如, 在 l_2 中, 取 $C=\{x_n\in l_2, x_n\geqslant 0\}$, 则 $\mathrm{int}C=\varnothing$, 而 $N(C)=\{(x_n)\in l_2; x_n>0\}$. 1988 年, Rainwater[3] 用 $N(C)$ 取代 $\mathrm{int}C$, 证明了若 f 为可分 Banach 空间闭凸集 C 上的局部 Lipschitz 凸函数, 则 f 在 $N(C)$ 的一个稠密的 G_δ 子集上处处 Gateaux 可微. 因而从定义域的角度推广了著名的 Mazur[4] 定理: 可分 Banach 空间的非空开凸子集上的每个连续的凸函数均在其定义域的一个稠密的 G_δ 子集上处处 Gateaux 可微. 同年, Rainwater[3] 证明了, 若 Banach 空间 E 的对偶 E^* 的闭单位球 B^* 上存在一个度量 d, 使得对 B^* 的每个非空子集 A 及 $\varepsilon>0$ 均存在 A 的 w^* 相对开集 W 满足 $\mathrm{diam}_d W<\varepsilon$, f 为 E 的非空闭凸子集 C 的非支撑点集 $N(C)$ 上的局部 Lipschitz 凸函数, 则 f 在 $N(C)$ 的一个稠密的 G_δ- 子集上处处 Gateaux 可微; 当 d 为范数导出的度量时, f 必在 $N(C)$ 的一个稠密的 G_δ 子集上处处 Fréchet 可微. 1994 年, 吴从炘和程立新[5] 证明了, $N(C)$ 上的 Lipschitz 凸函数必是某个定义在整个 Banach 空间 E 上的 Lipschitz 凸函数在 $N(C)$ 的限制. 并且进一步证明了: 对可分 Banach 空间 E 的非空开凸子集 D 上的连续凸函数 f 和 f 的每个 Gateaux 可微点 $x\in D$, 均存在闭凸集 $C\subset D$ 使得 $x\in N(C)$ 且 x 为 f_C(f 在 C 上的限制) 的 Fréchet 可微点.

本文用更简单的方法证明了, 每个定义在可分 Banach 空间闭凸集 C 上的局部 Lipschitz 函数 f, 均在 $N(C)$ 上几乎处处 Gateaux 可微, 并且每个 Gateaux 可微点均可成为相对 Fréchet 可微点. 同时指出对于定义在 $N(C)$ 上的局部 Lipschitz 凸函数 f, 它在 $x\in N(C)$ 处 Fréchet 可微不能推出 ∂f 在该处范- 范上半连续.

1 定义与性质

定义 设 C 为 Banach 空间 E 的非空闭凸子集, $N(C)\neq\varnothing$, f 为 $N(C)$ 上的实值函数, 称

i) f 在 $x\in N(C)$ 处 Gateaux 可微, 如果存在 $x^*\in E^*$ 使得

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\langle x^*, y\rangle\right]=0,$$
$$\forall y\in C_x\equiv\bigcup_{\lambda>0}\lambda(C-x).$$

ii) f 在 $x\in N(C)$ 处 Fréchet 可微, 如果存在 $x^*\in E^*$ 使得

$$\lim_{t\to 0}\sup_{y\in B\cap(C-x)}\left|\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\langle x^*, y\rangle\right|=0.$$

当 f 为 $N(C)$ 上的局部 Lipschitz 凸函数时, 即 $\forall x\in N(C)$, $\exists\,\delta>0, L>0$, 使得 $|f(u)-f(v)|$

收稿日期: 2002-05-10
作者简介: 滕岩梅 (1974-), 女, 博士研究生.

$\leqslant L \| u - v \|$, $\forall u, v \in B(x, \delta) \cap N(C)$. 吴从炘和程立新[5] 证明了$f$ 在$x \in N(C)$ 处Gateaux 可微当且仅当把f 的定义域从点x 的一个局部邻域延拓到整个空间时, 延拓后的函数在点x 处Gateaux 可微, 这等价于f 的次微分映射∂f 在x 处单值, 也等价于∂f 的每个选择在x 处范- w^* 连续. 关于f 的Fréchet 可微性, 我们有

性质 设f 为$N(C)$上的局部Lipschitz 凸函数. 则f 在$x \in N(C)$ 处Fréchet 可微的充分必要条件为∂f 在x 处单值且∂f 的每个选择函数φ在点x 处均有$\varphi(y) \xrightarrow{\tau} \varphi(x)$, 其中$y \in N(C)$, $y \to x$, $\varphi(y) \xrightarrow{\tau} \varphi(x)$ 表示在$B \cap (C - x)$ 上一致收敛.

证明 充分性. 设φ为∂f 的一个选择函数且$\varphi(y) \xrightarrow{\tau} \varphi(x)$ $(y \in N(C), y \to x)$. 此时, 关于$y \in B \cap (C - x)$ 一致地有

$$0 \leqslant \frac{f(x + \delta y) - f(x)}{\delta} - \langle \varphi(x), y \rangle \leqslant$$
$$\langle \varphi(x + \delta y), y \rangle - \langle \varphi(x), y \rangle \to 0,$$

即f 在x 处Fréchet 可微.

必要性. 设f 在$x \in N(C)$ 处Fréchet 可微. φ为∂f 的一个选择函数. 若φ在x 处非τ连续, 则存在$x_n \in N(C)$, $x_n \to x$, $\varepsilon > 0$, $y_n \in B \cap (C - x)$ 使得$\langle \varphi(x_n) - \varphi(x), y_n \rangle > 2\varepsilon$或$\langle \varphi(x_n) - \varphi(x), y_n \rangle < -2\varepsilon$. 不妨设前一个不等式成立. f 在x 处的可微性推出, 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得

$$f(x + y) - f(x) - \langle x^*, y \rangle \leqslant \varepsilon \| y \|,$$
$$\forall y \in B \cap (C - x), \| y \| \leqslant \delta.$$

因$\varphi(x_n) \in \partial f(x_n)$, 故

$$\langle \varphi(x_n), (x + y) - x_n \rangle \leqslant f(x + y) - f(x_n).$$

因而

$$\langle \varphi(x_n), y \rangle \leqslant f(x + y) - f(x) +$$
$$\langle \varphi(x_n), x_n - x \rangle + f(x) - f(x_n).$$

令$z_n = \delta y_n$, 则

$$2\varepsilon\delta < \langle \varphi(x_n) - \varphi(x), z_n \rangle \leqslant$$
$$[f(x + z_n) - f(x) - \langle \varphi(x), z_n \rangle] +$$
$$\langle \varphi(x_n), x_n - x \rangle + f(x) - f(x_n) \leqslant$$
$$\varepsilon\delta + \langle \varphi(x_n), x_n - x \rangle + f(x) - f(x_n) \to \varepsilon\delta,$$

矛盾.

注 Rainwater[3] 指出$N(C)$ 上局部Lipschitz 凸函数f 在$x \in N(C)$ 处Fréchet 可微的充分必要条件为∂f 在x 处单值且范- 范上半连续. 下例说明∂f 在x 处范- 范上半连续并非f 在x 处Fréchet 可微的必要条件.

例 设E 可分, E^* 不可分, 即E 可分但不是Asplund 空间, 例如l_1 就是这样的空间.

证明 因为E 是一个可分非Asplund 空间, 则存在连续凸函数f 使得f 在E 上无处Fréchet 可微. 取$x \in E$ 为f 的Gateaux 可微点, 不妨设$x = 0$, $x^* \in \partial f(0)$. 因f 在0 点不是Fréchet 可微的, 则存在$x_n \to 0$, $x_n^* \in \partial f(x_n)$ 以及$\varepsilon_0 > 0$使得$\| x_n^* - x^* \| \geqslant \varepsilon_0$因为$E$ 可分, 可以选取$y_n \in E$ 使得$y_n \to 0$ 且$\mathrm{span}(y_n)$ 在E 中稠密. 令$C = \overline{co}(\pm y_n \cup (2x_n))$, 则$C$ 为紧凸集且$(x_n) \subset N(C)$. 把f 限制在C 上并记之为f_c, 则在$N(C)$ 上$\partial f = \partial f_c$.

只须证f_c 在$0 \in N(C)$ 处Fréchet 可微. 事实上, 若f 在0 点不是Fréchet 可微的, 则存在$(z_n) \subset C$, $0 < t_n \searrow 0$ 以及$\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\frac{f(t_n z_n) - f(0)}{t_n} - \langle x^*, z_n \rangle \geqslant \varepsilon_0$$

不妨设$z_n \to z$, 则有

$$\varepsilon_0 \leqslant \frac{f(t_n z_n) - f(0)}{t_n} - \langle x^*, z_n \rangle =$$
$$\frac{f(t_n z) - f(0)}{t_n} - \langle x^*, z \rangle + \frac{f(t_n z_n) - f(t_n z)}{t_n} +$$
$$\langle x^*, z \rangle - \langle x^*, z_n \rangle \to 0,$$

矛盾.

2 非凸函数的微分

定义 (Gauss) 测度

i) 设Σ为实直线R 上的Borel 代数, Σ上的一个测度μ称为非退化的高斯测度, 如果

$$(*) \ \mu(B) = (2nb)^{-1/2} \int_B \exp[-(2b)^{-1}(t - a)^2] \mathrm{d}t,$$
$$\forall B \in \Sigma$$

其中$b > 0$, $a \in R$ 为测度μ的平均值.

ii) 设Σ为Banach 空间E 的Borel 代数, Σ上的一个概率测度λ称为具有平均值$x_0 \in E$ 的非退化的Gauss 测度, 如果对每个$f \in E^*$, $f \neq 0$, 测度$\mu = \lambda \circ f^{-1}$ 具有$(*)$ 的形式, 其中$a = f(x_0)$.

iii) 可分Banach 空间E 的Borel 集B 称为Gauss 零测度集, 如果对E 上每个非退化的Gauss 测度μ都有$\mu(B) = 0$.

Aronszajn[6] 证明了: 可分Banach 空间到具有RNP 的空间的每个局部Lipschitz 映射除去一个

Gauss 零测度集之外, 处处 Gateaux 可微并且若 $x_n \to 0$, $\mathrm{span}(x_n)$ 在 E 中稠密, 则 $C \equiv \overline{co}(x_n)$ 具有 Gauss 正测度. Phelps[7] 证明了可数多个 Gauss 零测度集的并仍是 Gauss 零测度集. [也见, Benyamini 和 Lindenstrauss[8]]. 受吴从炘和程立新[5,9] 的启发我们有下面引理.

引理 1　设 $C \subset E$ 为闭凸集. $N(C) \neq \emptyset$, f 为 $N(C)$ 上的局部 Lipschitz 函数. 令 $C_n = \{x \in N(C): f$ 在 x 处的局部 Lipschitz 常数不超过 $n\}$, 则

i) C_n 为 $N(C)$ 的相对开集且 $N(C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$;

ii) 对每个 $n \geqslant 1$, 有 E 上的 Lipschitz 常数不超过 n 的函数 f_n 使得在 C_n 上 $f_n = f$.

证明　i) 由 C_n 的定义, 显然 C_n 为 $N(C)$ 的开集并且 $N(C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

ii) 对每个 $n \geqslant 1$, 令

$$\begin{cases} g_n(x) = f(x), & x \in C_n \\ g_n(x) = +\infty, & x \notin C_n. \end{cases}$$

则 g_n 为 E 上下有界且在 C_n 上 Lipschitz 常数不超过 n 的函数. 再令

$$f_n(x) = \inf\{g_n(y) + n\|y - x\|,\ y \in E\},\quad x \in E$$

则 f_n 即为所求.

定理　设 C 为 Banach 空间 E 的闭凸集, $N(C) \neq \emptyset$, f 为 $N(C)$ 上的局部 Lipchitz 函数, 则 f 的 Gateaux 可微点集 G 对每个非退化的 Gauss 测度 λ 均有 $\lambda(G) = \lambda(N(C)) > 0$. 特别地, f 在 $N(C)$ 上几乎处处 Gateaux 可微.

证明　对每个 $C_n \neq \emptyset$, 以及每个非退化的 Gauss 测度 λ, 有 $\lambda(C_n) > 0$. 设 G_n 为(引理 1 中的) f_n 包含在 C_n 中的 Gateaux 可微点, 则 $\lambda(G_n) = \lambda(C_n)$. 因而 $\lambda(N(C)) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \lambda(G)$. 证毕.

定理　假设 E 是一个可分 Banach 空间, f 是 $N(C)$ 上局部 Lipschitzian 函数, 则对任意的 $u \in N(C)$, 存在闭凸集 $D \subset C$ 使得 $u \in N(D)$ 且 f_D 在 D 中的每个 Gateaux 可微点均是 f_D 的 Fréchet 可微点.

证明　任取 $u \in N(C)$, 存在 $\delta > 0$ 及 $n > 0$ 使得 f 在 $B(u, \delta) \cap N(C)$ 上 Lipschitz 常数不超过 n. 记 $D_1 = \overline{B(u, \delta) \cap N(C)}$, 则 $u \in N(D_1)$. 所以 $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda N(D_1)$ 在 E 中稠密, 不妨设 $u = 0$. 在 $N(D_1)$ 中选取序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \to 0$ 且 $0 \in N(D)$, 其中 $D = \overline{co}(x_n)$.

下面证明 f_D 的 Gateaux 可微点均是 Fréchet 可微点. 设 $u \in N(D)$ 且其 Gateaux 微分为 x^*. 若 f_D 在 u 点不是 Fréchet 可微的, 则存在 $\varepsilon > 0$, $\{y_n\} \subset D$, $t_n \searrow 0$ 使得

$$\left|\frac{f(v + t_n x_n) - f(v)}{t_n} - \langle x^*, x_n\rangle\right| \geqslant \varepsilon_0$$

不妨设

$$\frac{f(v + t_n x_n) - f(v)}{t_n} - \langle x^*, x_n\rangle \geqslant \varepsilon_0$$

由 D 的紧性设 $x_n \to x_0$, 则

$$\varepsilon_0 \leqslant \frac{f(v + t_n x_n) - f(v)}{t_n} - \langle x^*, x_n\rangle =$$

$$\frac{f(v + t_n x) - f(v)}{t_n} - \langle x^*, x\rangle +$$

$$\frac{f(v + t_n x_n) - f(v + t_n x)}{t_n} + \langle x^*, x - x_n\rangle \to 0,$$

矛盾.

参考文献:

[1] Bishop, Phelps R R. The support functionals of a convex set [J]. Proc. Symp. in Pure Maths 7. Convexity, Amer. Math. Soc., 1963, 27-35.

[2] Phelps R R. Some topological properties of support points of convex sets[J]. Israel J. Math., 1972, 13: 327-336.

[3] Rainwater J. Yet more on the differentiability of convex functions[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, 103: 773-777.

[4] Mazur S. Uber Konvexe mengen in linear nomierten raumen [J]. Studia Math., 1933, 4: 70-84.

[5] Wu Congxin, Cheng Lixin. A note on the differentiability of convex functions[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, 121: 1 057-1 062.

[6] Aronszajn N. Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces[J]. Studia Math., 1976, 57: 147-190.

[7] Phelps R R. Gaussian null sets and differentiability of Lipschitz map on Banach spaces[J]. Pacific. J. Math., 1978, 77: 23-31.

[8] Benyamini Y, Lindenstrauss J. Geometric nonlinear functional analysis[J]. Amer. Math. Soc., 2000, 48: 125-161.

[9] Wu Congxin, Cheng Lixin. Extensions of the Preiss differentiability theorem[J]. J. Funct. Anal., 1994, 124: 112-118.

The Differentibility of Lipschitzian Function on Small Sets

TENG Yan-mei, CHENG Li-xin
(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: Suppose that C is a nonempty closed convex set of a seperable Banach space E, and f is locally Lipschitz function on $N(C)$, the set of nonsupport points of C. In this paper, we proved that for any $u \in N(C)$, there is a closed convex set $D \subset C$ satisfying $u \in N(D)$ such that every Gateaux differentiable point of f_D (the restriction of f on D) is the Fréchet differentiable point of f relativing to D. So that the set of Fréchet differentiable points of f relativing to D is a dense G_δ-set in D; In addition, we point out that ∂f_D is a singleton and norm-norm upper semicontinuous at $x \in N(D)$ is not the necessary condition of f being Fréchet differentiable at x relativing to D, which was an error in the paper of Rainwater.

Key words: convex sets; nonsupport point; (Gateaux) Fréchet differentiable; Lipschitz function; Banach space

简　讯

厦门大学学报(自然科学版)在全国综合类高等学校学报中
总被引频次名列第二,影响因子名列第五

据中国科学技术信息研究所 2002 年版《中国科技期刊引证报告》计量指标统计,厦门大学学报(自然科学版)在全国综合类高等学校学报总被引频次分类排序中名列第二. 排名前 6 位的顺序依次为,南京大学学报、厦门大学学报、中山大学学报、武汉大学学报、内蒙古大学学报、北京大学学报.

影响因子名列第五. 排名前 6 位的顺序依次为,南京大学学报、武汉大学学报、内蒙古大学学报、中山大学学报、厦门大学学报、北京大学学报.

总被引频次可以显示该期刊被使用和受重视的程度,以及在科学交流中的作用和地位. 通常,期刊影响因子越大,它的学术影响力和作用也越大.

厦门大学学报(自然科学版)编辑部
2002 年 12 月